TITLE:
2次錐計画問題によるロバスト・トラッキングエラー最小化 (数理最適化から見た「凸性の深み,非凸性の魅惑」)

AUTHOR(S):
稲場, 広記; 水野, 眞治; 中田, 和秀

CITATION:
稲場, 広記 ...[et al]. 2次錐計画問題によるロバスト・トラッキングエラー最小化 (数理最適化から見た「凸性の深み,非凸性の魅惑」). 数理解析研究所講究録 2004, 1349: 113-124

ISSUE DATE:
2004-01

URL:
http://hdl.handle.net/2433/24864

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録 1349 巻 2004 年 113-124

2次錐計画問題によるロバスト・トラッキングエラー最小化

東京工業大学・社会理工学研究科　稲場 広記 (Hiroki Inaba)
水野 眞治 (Shinji Mizuno)
中田 和秀 (Kazuhide Nakata)
Graduate School of Decision Science and Technology
Tokyo Institute of Technology

概要

近年、金融市場におけるポートフォリオ選択問題に対し、市場パラメータの不確実性を考慮したロバスト最適化モデルが提案されている．本稿では、そのひとつであるロバスト・トラッキングエラー最小化モデルを凸計画問題の一種である2次錐計画問題に帰着できることを示す．2次錐計画問題は近年開発された内点法により効率良く解くことができる．本稿の後半では実際に数値実験を行い、得られた最適化問題が従来よりも効率的に解く事ができることを証明する．

1　はじめに

金融市場におけるポートフォリオ選択問題とは、投資対象となるいくつかの金融資産に対し、「リスク」を抑えながら「リターン」が最大となるような投資比率（ポートフォリオ）を決める問題である．あるいは、一定の「リターン」を保証しながら、「リスク」が最小となるポートフォリオを決める問題である．ポートフォリオ選択問題に最初に数理的なモデルを提唱したのが、Markowitz [11] であった．Markowitz のポートフォリオ選択問題は、ポートフォリオの「リターン」と「リスク」をそれぞれ各資産の期待収益率と分散共分散行列で表現し、最低限得たい期待収益率を与えたとき、分散が最小となるポートフォリオが凸2次計画問題を解くことによって得られることを示した．最近では、投資目的に応じてさまざまなリスクを最小化させるモデルが提案されている．その中で、トラッキングエラー最小化モデルとは、投資家が目標となるポートフォリオ（以下、ベンチマーク）の動きと連動するポートフォリオを構築したいときに用いられる．他にも、下半分散や VaR など様々なリスク指標 [6] が提案されてきた．

平均分散モデルは理論的な成功を収めたにもかかわらず、実務家はこの数理的モデルを避ける傾向にあった．その理由のひとつとして、平均分散モデルから得られるポートフォリオを実際に運用した際、多くの場合に理論的なパフォーマンスと実際のパフォーマンスとで、ずれが生じてしまうことがあったからである．その一番の原因は、市場パラメータ（各資産の期待収益率および分散共分散行列）が既知であると仮定していることにある．すなわち、市場パラメータを既知として最適なポートフォリオを求めたとしても、実際のパフォーマンスは市場パラメータのずれに影響を受けてしまい、そのポートフォリオの最適性は保証されないのである．それでは、市場パラメータを精度良く推定する必要があるが、ヒストリカルデータから推定する場合「平均値のくもり[1]」[10] など無視することのできない事実があり、精度の良い推定は難しい．また、どのような推定法をとってみても、必ず推定誤差は存在してしまう．

[1]期待収益率の不偏推定量 $\hat{r}$ 自身が持つ標準偏差は $\sigma_{\hat{r}} = \sigma/\sqrt{n}$ である．ただし、σ は元データの標準偏差．金融市場の場合、データの数 n に限りがあるので、推定値の精度は上がらない．

以上の問題点を踏まえて、近年ではロバスト最適化という手法を用いて、市場パラメータ(期待収益率および分散共分散行列)の不確実性や推定誤差に対して頑強な (robust) ポートフォリオを構築するモデルが提案されている．凸最適化へのロバスト最適化は Ben-tal と Nemirovski[1] によって提案され、ロバスト制御の分野でもロバスト最適化の研究が多くなされている (Ghaoui[4] など)．また、ポートフォリオ選択問題へのロバスト最適化の応用は、すでにいくつかの文献で発表されている．Goldfarb と Iyengar[5] は、平均分散モデルの拡張版のマルチファクターモデルに対するロバスト最適化モデルが、不確実性集合に楕円体を定義することにより、内点法を用いて効率よく解くことのできる 2 次錐計画問題に帰着できることを示した．ただし、このアプローチは問題をマルチファクターモデルに限ってしまったことで、ロバストモデルの有効性が明確でないという欠点があった．なぜなら、市場パラメータをファクターで置き換えてしまったあとでいくら不確実性を考慮したロバスト最適化モデルを考えても、最初のファクターの選択の影響が大きいからである．(ただし、これも理論的な話であって、さまざまな実証研究に基づいてファクターの選択をしたならば、実務的には問題ないのかもしれない．) そこで、本稿の前半では、基本的な平均分散モデルに対するロバスト最適化モデルが 2 次錐計画問題に帰着できることを改めて確かめる．

また、様々なリスク指標や不確実性集合に対しても同様に研究がなされている．例えば、Lobo[8] はリスク指標と不確実性集合にそれぞれトラッキングエラーと楕円体を採用し、その解析解を用いて半正定値計画問題に帰着できることを示した．さらに、Costa と Paiva[3] は不確実性集合を多面体で定義したロバスト・トラッキングエラー最小化問題が LMI(線形行列不等式) の枠組みで解けることを示した．ただし、半正定値計画問題や LMI は、同じ問題のサイズの 2 次錐計画問題よりも解く時間が多くかかるということが知られている．そこで、本稿の後半では不確実性集合に楕円体を採用したトラッキングエラー最小化問題が 2 次錐計画問題に帰着できることを示す．今回、定式化に関して 2 つの方式を採用した．一方は Lobo[8] を参考に問題を一旦、半正定値計画問題に帰着したあと、行列の変換により 2 次錐計画問題に定式化する．もう一方は、トラッキングエラーが実数の絶対値に対して制約を課すことから、絶対値の性質を使って 2 次錐計画問題に定式化する．

本稿の構成は、以下のとおりである．第 2 章では、基本的な平均分散モデルに対して、ロバスト最適化モデルを提案する．そして、それぞれのパラメータに対して適当な不確実性集合を定義したとき、ロバスト最適化問題が 2 次錐計画問題へ帰着できることを示す．第 3 章では、リスク指標にトラッキングエラーを採用したトラッキングエラー最小化問題を考え、そのロバスト最適化モデルが同様に 2 次錐計画問題に帰着できることを示す．ロバスト・トラッキングエラー最小化問題はいままでは半正定値計画問題のクラスにまでしか定式化できていなかったのに対し、より単純な構造を持つ 2 次錐計画問題に定式化できたことは、最適ポートフォリオの計算において大きなメリットである．さらに第 4 章では、第 3 章のロバスト・トラッキングエラー最小化問題に対して数値実験を行う．この実験では本稿のモデルと従来のモデルそれぞれに対し計算時間を計測し比較する．

2 ロバスト平均分散モデル

離散時間におけるポートフォリオ選択問題を考える．市場には投資対象となる資産が n 個存在し、1 期間の各資産の収益率をベクトル $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, ..., r_n)^T \in \boldsymbol{R}^n$ で表す．ここで資産 i の収益率 r_i とは、資産 i の時点 0 と時点 1 での価格 P_i^0, P_i^1 を用いて $r_i = (P_i^1 - P_i^0)/P_i^0$ で定義される．たとえば、時点 0 で収益率 r_i であることが分かっている資産 i に 1 円投資したとき、時点 1 では資産 i は r_i 円の利益を生む．いま、収益率 $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}^n$ は確率変数であるとし、その期待値と分散共分散行列をそれぞれ $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{\Sigma} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ とする．この $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\Sigma}$ を市場パラメータと呼び、各資産の収益率分布を特徴づけている．また市場において、投資家が各資産に投資する配分率をポートフォリオ $\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{R}^n$ で表し、$\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{\phi} = 1$ を満たしているものとする．ただし、$\boldsymbol{1}$ はすべての要素が 1 である n 次元ベクトルである．このとき、ポートフォリオの収益率の期待値と分散はそれぞれ

$$\mathbf{E}(r) = \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\phi}, \quad \mathbf{Var}(r) = \boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi} \tag{1}$$

となる．

もし、1 期間後のパラメータ $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\Sigma}$ が完全に分かっているものとすると、決定変数を $\boldsymbol{\phi}$ として次のような最適化問題を考えることができる．(ただし、α は最低限達成されるべき収益率とする.)

$$\left|\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi} \\ \text{Subject to} & \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\phi} \geq \alpha \\ & \boldsymbol{1}^T\boldsymbol{\phi} = 1 \end{array}\right. \tag{2}$$

これが Markowitz によって提唱された平均分散モデルである．この平均分散モデルに補助変数 ν を導入すると、

$$\left|\begin{array}{ll} \text{minimize} & \nu \\ \text{Subject to} & \boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi} \leq \nu \\ & \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\phi} \geq \alpha \\ & \boldsymbol{1}^T\boldsymbol{\phi} = 1 \end{array}\right. \tag{3}$$

と、2 次制約のある問題に同値変形できる．ここでパラメータが不確実なものであり、ある不確実性集合に含まれることが分かっているものと仮定し、Ben-tal と Nemirovski[1] によって提唱されたロバスト最適化を行う．ポートフォリオの収益率の期待値 $\boldsymbol{\mu}$ と分散 $\boldsymbol{\Sigma}$ がそれぞれ集合 $\mathcal{M} \subset \boldsymbol{R}^n$ と $\mathcal{S} \subset \boldsymbol{R}^{n \times n}$ に含まれるとき、ロバスト最適化問題は

$$\left|\begin{array}{ll} \text{minimize} & \nu \\ \text{Subject to} & \max_{\{\boldsymbol{\Sigma} \in \mathcal{S}\}} \boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi} \leq \nu \\ & \min_{\{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}\}} \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\phi} \geq \alpha \\ & \boldsymbol{1}^T\boldsymbol{\phi} = 1 \end{array}\right. \tag{4}$$

といった、min-max 問題に定式化できる．これは結果的に、ロバスト最適化はパラメータが制約式に対して最悪な値をとったときについて、最適化を行うことになる．これより先では、以上の min-max 問題をロバスト平均分散モデルと呼ぶことにする．

2.1 期待収益率に関する2次錐制約

不確実性集合をどのように定義するかはロバスト最適化において重要な問題である．ここでは、Lobo[8] に従い期待収益率 $\boldsymbol{\mu}$ の不確実性集合 $\mathcal{M}$ を楕円体で定義する．すなわち、

$$\mathcal{M} = \left\{\boldsymbol{\mu} : (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) \leq 1\right\} \tag{5}$$

となる．ここで $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ は正定値対称行列．このとき、ロバスト平均分散モデルの $\boldsymbol{\mu}$ に関する制約式 $\min_{\{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}\}} \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\phi} \geq \alpha$ の左辺は

$$\inf_{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}} \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\phi} = \inf_{||\boldsymbol{G}^{\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\mu}}||\leq 1} (\boldsymbol{\mu}_0 + \tilde{\boldsymbol{\mu}})^T\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\mu}_0^T\boldsymbol{\phi} + \inf_{||z||\leq 1} z^T\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\phi} \tag{6}$$

となる．よって、解析解 z^* は簡単に得られ、

$$z^* = -\frac{\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\phi}}{||\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\phi}||} \tag{7}$$

である．よって、

$$\inf_{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}} \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\mu}_0^T\boldsymbol{\phi} - \frac{\boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{\phi}}{\sqrt{\boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{\phi}}} = \boldsymbol{\mu}_0^T\boldsymbol{\phi} - \sqrt{\boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\mu}_0^T\boldsymbol{\phi} - ||\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\phi}|| \tag{8}$$

となる．

2.2 分散共分散行列に関する2次錐制約

市場パラメータの分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ に対しては [5] より、不確実性集合 $\mathcal{S}$ を

$$\mathcal{S} = \left\{\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} + \boldsymbol{\Delta} \succ 0, \boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Delta}^T, ||\boldsymbol{\Sigma}_0^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Sigma}_0^{\frac{1}{2}}|| \leq \eta\right\} \tag{9}$$

と定義する．ただし、$\boldsymbol{\Sigma}_0 \succ 0$, $0 \leq \eta < 1$, ノルム $||\boldsymbol{A}||$ は対称行列 $\boldsymbol{A}$ の最大固有値で $||\boldsymbol{A}|| = \max_i |\lambda_i(\boldsymbol{A})|$ である．このとき、問題 (2.4) の分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ に関する制約式は、[5] の場合と同様にして、次の2次錐制約へと帰着できる．

$$\left\| \begin{array}{c} 2\boldsymbol{\Sigma}_0^{\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\phi}} \\ (1-\eta)\nu - 1 \end{array} \right\| \leq (1-\eta)\nu + 1 \tag{10}$$

2.3 2次錐計画問題への定式化

以上、2.1 節と 2.2 節で定義した不確実性集合より（$\boldsymbol{\mu}$ は楕円制約）、ロバスト平均分散モデルは以下のように2次錐計画問題に定式化できる．

$$
\left|\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \nu \\
\text{Subject to} & \left\| \begin{array}{c} 2\boldsymbol{\Sigma}_0^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\phi} \\ (1-\eta)\nu - 1 \end{array} \right\| \leq (1-\eta)\nu + 1 \\
& \|\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\phi}\| \leq \boldsymbol{\mu}_0^T\boldsymbol{\phi} - \alpha \\
& \mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi} = 1
\end{array}\right.
$$

3 ロバスト・トラッキングエラー最小化モデル

TOPIXなど目標となるポートフォリオ（以下、ベンチマーク）$\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{R}^n$ の動きと連動するポートフォリオを構築したいとする[2]．このとき決定変数となるポートフォリオを $\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{R}^n$ とすると、$\boldsymbol{\phi}$ と $\boldsymbol{\psi}$ のトラッキングエラー（2つのポートフォリオの差の二乗の期待値）は

$$
\begin{aligned}
E[\{\boldsymbol{r}^T(\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\psi})\}^2] &= (\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\psi})^T E[\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T](\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\psi}) && (11) \\
&= (\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\psi})^T(\boldsymbol{\Sigma}+\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T)(\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\psi}) && (12)
\end{aligned}
$$

となる．

このとき、トラッキングエラー最小化モデルは

$$
\left|\begin{array}{ll}
\text{minimize} & (\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\psi})^T(\boldsymbol{\Sigma}+\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T)(\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\psi}) \\
\text{Subject to} & \mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi} = 1 \\
& A\boldsymbol{\phi} \leq \boldsymbol{b}
\end{array}\right. \qquad (13)
$$

となる．(ただし $A \in \boldsymbol{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$ とし $A\boldsymbol{\phi} \leq \boldsymbol{b}$ は実務上の制約を表す．) ここで、市場パラメータが $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}, \boldsymbol{\Sigma} \in \mathcal{S}$ であるとすると、上のロバスト最適化問題は、

$$
\left|\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \max_{\{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M},\boldsymbol{\Sigma}\in\mathcal{S}\}}(\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\psi})^T(\boldsymbol{\Sigma}+\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T)(\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\psi}) \\
\text{Subject to} & \mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi} = 1 \\
& A\boldsymbol{\phi} \leq \boldsymbol{b}
\end{array}\right. \qquad (14)
$$

と定式化できる．さらに $\tilde{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}$ とおいて、補助変数 ν, λ を導入することにより

$$
\left|\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \nu + \lambda \\
\text{Subject to} & \max_{\{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}\}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T\tilde{\boldsymbol{\phi}} \leq \lambda \\
& \max_{\{\boldsymbol{\Sigma}\in\mathcal{S}\}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\Sigma}\tilde{\boldsymbol{\phi}} \leq \nu \\
& \mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}(\tilde{\boldsymbol{\phi}}+\boldsymbol{\psi}) = 1 \\
& A(\tilde{\boldsymbol{\phi}}+\boldsymbol{\psi}) \leq \boldsymbol{b} \\
& \tilde{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}
\end{array}\right.
$$

と表現できる．

---

[2]このような運用のことをパッシブ運用という．反対にベンチマークを上回るようなパフォーマンスを目指すことをアクティブ運用という．

3.1 期待収益率に関する2次錐制約

ここで、$\boldsymbol{\mu}$ についての楕円体の不確実性集合 $\mathcal{M}$ を、正定値行列 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ を用いて

$$\mathcal{M} = \{\boldsymbol{\mu} : (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) \leq 1\} \tag{15}$$

と定義すると、制約式

$$\max_{\{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}\}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} \leq \lambda \tag{16}$$

は「$(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) \leq 1$ を満たすすべての $\boldsymbol{\mu}$ について

$$\boldsymbol{\mu}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu} \leq \lambda \tag{17}$$

」と同値である．さらに進む前に、次の補題を紹介する．

補題 ($\mathcal{S}$-procedure[2][7])

$F_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{x} + c_i, \quad i = 0, \ldots, p$ は $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に関する2次関数である．このとき、

$$\begin{bmatrix} c_0 & \boldsymbol{b}_0^T \\ \boldsymbol{b}_0 & \boldsymbol{A}_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{p} \tau_i \begin{bmatrix} c_i & \boldsymbol{b}_i^T \\ \boldsymbol{b}_i & \boldsymbol{A}_i \end{bmatrix} \succeq 0$$

となる $\tau_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, p$ が存在するならば、$F_i(\boldsymbol{x}) \geq 0, \quad i = 1, \ldots p$ となるすべての $\boldsymbol{x}$ について、$F_0(\boldsymbol{x}) \geq 0$ が成り立つ．
さらに、$p = 1$ のとき $F_1(\boldsymbol{x}_0) > 0$ となる $\boldsymbol{x}_0$ が存在するならば、逆も成り立つ．

よって、$(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) \leq 1$ を満たすすべての $\boldsymbol{\mu}$ について (17) が成り立つ必要十分条件は、

$$\begin{bmatrix} \lambda & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & -\tilde{\boldsymbol{\phi}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \end{bmatrix} - \tau \begin{bmatrix} 1 - \boldsymbol{\mu_0}^T \boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu_0} & \boldsymbol{\mu_0}^T \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu_0} & -\boldsymbol{G} \end{bmatrix} \succeq 0 \tag{18}$$

を満たす $\tau \geq 0$ が存在することである．ここで Schur complement より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= \begin{bmatrix} \tau\boldsymbol{\mu_0}^T \boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu_0} - \tau + \lambda & -\tau\boldsymbol{\mu_0}^T \boldsymbol{G} \\ -\tau\boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu_0} & \tau\boldsymbol{G} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \tau \geq 0 \\ \Longleftrightarrow \tilde{\boldsymbol{M}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \\ 0 & \tau\boldsymbol{\mu_0}^T \boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu_0} - \tau + \lambda & -\tau\boldsymbol{\mu_0}^T \boldsymbol{G} \\ \tilde{\boldsymbol{\phi}} & -\tau\boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu_0} & \tau\boldsymbol{G} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \tau \geq 0 \end{aligned} \tag{19}$$

とできるので、(16) は半正定値制約として表すことができる．
さらに、この制約式が2次錐制約に帰着できることを示そう．(19) より

$$\tilde{M} \succeq 0 \iff \bar{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^T \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \tilde{M} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^T \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \succeq 0$$

$$\iff \bar{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & \tau \boldsymbol{\mu_0}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\mu_0} - \tau + \lambda & -\tau \boldsymbol{\mu_0}^T \boldsymbol{G}^{\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\boldsymbol{\phi}} & -\tau \boldsymbol{G}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\mu_0} & \tau \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \succeq 0 \qquad (20)$$

ここで、$\tau = 0$ の場合 $\bar{M} \succeq 0$ が成り立つためには $\lambda \geq 0$ かつ $\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{0}$ でなければならない．すなわち、

$$M \succeq 0 \iff \begin{cases} \lambda \geq 0 \\ \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{0} \end{cases} \qquad (21)$$

となる．次に、$\tau > 0$ の場合、$\bar{M}$ の右下の $(n \times n)$ 行列に対し、再び schur complement を用いることにより、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \boldsymbol{\mu_0}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\mu_0} - \tau + \lambda \end{bmatrix} - \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}} \\ -\tau \boldsymbol{\mu_0}^T \boldsymbol{G}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\boldsymbol{\phi}} & -\tau \boldsymbol{G}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\mu_0} \end{bmatrix} \succeq 0$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \boldsymbol{\mu_0}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\mu_0} - \tau + \lambda \end{bmatrix} - \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{G}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\phi}} & -\tau \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu_0} \\ -\tau \boldsymbol{\mu_0}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} & \tau^2 \boldsymbol{\mu_0}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\mu_0} \end{bmatrix} \succeq 0$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\tau} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{G}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\phi}} & \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu_0} \\ \boldsymbol{\mu_0}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} & -\tau + \lambda \end{bmatrix} \succeq 0$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\tau} \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w} & z \\ z & -\tau + \lambda \end{bmatrix} \succeq 0 \ (\text{ただし、} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}, z = \boldsymbol{\mu_0}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}}) \qquad (22)$$

となり 2×2 行列の半正定値制約に帰着できる．2×2 対称行列について

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \succeq 0 \iff a \geq 0, \quad c \geq 0, \quad ac - b^2 \geq 0$$

が成り立つので、前述の制約式は

$$1 - \frac{1}{\tau} \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w} \geq 0 \qquad (23)$$

$$-\tau + \lambda \geq 0 \qquad (24)$$

$$(1 - \frac{1}{\tau} \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w})(-\tau + \lambda) - z^2 \geq 0 \qquad (25)$$

となる．これは変数 $(\tau, \lambda, z, \boldsymbol{w})$ の実行可能集合が同一であることから、

$$\begin{aligned} \tau(1 - x) &\geq \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{w} && (26) \\ y &= -\tau + \lambda && (27) \\ xy &\geq z^2 && (28) \\ x &\geq 0 && (29) \\ y &\geq 0 && (30) \end{aligned}$$

という制約にすることができる．ここで、(26),(28) は

$$\left\| \begin{array}{c} 2\boldsymbol{w} \\ \tau + x - 1 \end{array} \right\| \leq \tau - x + 1 \qquad (31)$$

$$\left\| \begin{array}{c} 2z \\ x - y \end{array} \right\| \leq x + y \qquad (32)$$

となり 2 次錐制約になる．以上より、$\tau = 0$ のときも含めて、(16) の制約式が 2 次錐制約と線形制約で以下のようにあらわすことができる．

$$\left\| \begin{array}{c} 2\boldsymbol{w} \\ \tau + x - 1 \end{array} \right\| \leq \tau - x + 1 \qquad (33)$$

$$y = -\tau + \lambda \qquad (34)$$

$$\left\| \begin{array}{c} 2z \\ x - y \end{array} \right\| \leq x + y \qquad (35)$$

$$x \geq 0, y \geq 0, \tau \geq 0 \qquad (36)$$

3.2　2 次錐計画問題への定式化

分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ については、2.2 節と同様にして 2 次錐制約にできる．よって、ロバスト・トラッキングエラー最小化モデルは、

$$\left| \begin{array}{ll} \text{minimize} & \nu + \lambda \\ \text{Subject to} & \left\| \begin{array}{c} 2\boldsymbol{w} \\ \tau + x - 1 \end{array} \right\| \leq \tau - x + 1 \\ & y = -\tau + \lambda \\ & \left\| \begin{array}{c} 2z \\ x - y \end{array} \right\| \leq x + y \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \\ & \tau \geq 0 \\ & \boldsymbol{w} = \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\boldsymbol{\phi}} \\ & z = \boldsymbol{\mu_0}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} \\ & \left\| \begin{array}{c} 2\boldsymbol{\Sigma}_0^{\frac{1}{2}} \tilde{\boldsymbol{\phi}} \\ (1 - \eta)\nu - 1 \end{array} \right\| \leq (1 - \eta)\nu + 1 \\ & \\ & \boldsymbol{1^T}(\tilde{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{\psi}) = 1 \\ & A(\tilde{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{\psi}) \leq \boldsymbol{b} \\ & \tilde{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi} \end{array} \right.$$

として、2 次錐計画問題に定式化できる．

3.3 絶対値の性質を利用した定式化

一方、問題 (14) を補助変数 ν, λ, t を導入して

$$\left|\begin{array}{ll} \min & \nu+\lambda \\ \text{Subject to} & t^2 \leq \lambda \\ & \max_{\{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}\}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} \leq t^2 \\ & \max_{\{\boldsymbol{\Sigma}\in\mathcal{S}\}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\Sigma}\tilde{\boldsymbol{\phi}} \leq \nu \\ & \mathbf{1}^T(\tilde{\boldsymbol{\phi}}+\boldsymbol{\psi}) = 1 \\ & A(\tilde{\boldsymbol{\phi}}+\boldsymbol{\psi}) \leq \boldsymbol{b} \\ & \tilde{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\psi} \end{array}\right. \tag{37}$$

とすると、より簡単な定式化で 2 次錐制約が得られる．ここで問題 (37) の期待収益率に関する制約式

$$\max_{\{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}\}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} \leq t^2 \tag{38}$$

が不確実性集合 $\mathcal{M} = \left\{\boldsymbol{\mu} : (\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0) \leq 1\right\}$ のもと 2 次錐制約に帰着できることを証明しよう．ここで $\boldsymbol{G}$ は正定値対称行列 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ である．$\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}}$ をスカラーの 2 乗であると考えれば、(38) は以下のように変形できる．

$$\max_{\{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}\}} |\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu}|^2 \leq t^2 \tag{39}$$

$$\Leftrightarrow \max_{\{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}\}} |\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu}| \leq t \tag{40}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \max_{\{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}\}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu} \leq t \\ \min_{\{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}\}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu} \geq -t \end{array}\right. \tag{41}$$

以上より導き出された (41) は $\mathcal{M}$ が楕円であるとき、簡単に

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu}_0 + \|G^{-\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}\| \quad \leq \quad t \tag{42}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu}_0 - \|G^{-\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}\| \quad \geq \quad -t \tag{43}$$

と表すことができる．よって、問題 (37) における期待収益率 μ に関連する制約式は 3 つの 2 次錐制約で

$$\left\|\begin{array}{c} 2t \\ \lambda-1 \end{array}\right\| \quad \leq \quad \lambda+1 \tag{44}$$

$$\|G^{-\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}\| \quad \leq \quad t-\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu}_0 \tag{45}$$

$$\|G^{-\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}\| \quad \leq \quad t+\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu}_0 \tag{46}$$

と書くことができる．分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ に関しては 2.2 節の結果を使うことにより、最終的に得られる SOCP は以下のようになる．

$$
\begin{array}{|ll}
\min & \nu + \lambda \\
\text{Subject to} & \left\| \begin{array}{c} 2t \\ \lambda - 1 \end{array} \right\| \leq \lambda + 1 \\
& \|G^{-\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}\| \leq t - \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu}_0 \\
& \|G^{-\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}\| \leq t + \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu}_0 \\
& \left\| \begin{array}{c} 2\boldsymbol{\Sigma}_0^{\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\phi}} \\ (1-\eta)\nu - 1 \end{array} \right\| \leq (1-\eta)\nu + 1 \\
& \\
& \mathbf{1}^T(\tilde{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{\psi}) = 1 \\
& A(\tilde{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{\psi}) \leq \boldsymbol{b} \\
& \tilde{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}
\end{array}
$$

4 数値実験

今回の数値実験では、本稿の最大の貢献であるロバスト・トラッキングエラー最小化モデルが半正定値計画問題 (以下、SDP) から 2 次錐計画問題 (以下、SOCP) に定式化できた点について実験を行った．すなわち、第 3 章の 2 節で定式化したロバスト・トラッキングエラー最小化モデルについて資産数 $n = \{5, 10, 50, 100, 500, 1000\}$ と段階的に設定し、その計算時間の変化を検証した．その際、既存の SDP モデルとの計算時間を比較することにより、本稿の定式化によって最適化問題を解く計算時間が大幅に短縮できることを示した．ただし、今回は最適解を得るまでの計算時間にのみ着目したので、用いるパラメータ推定値のデータ $\boldsymbol{\mu_0}, \boldsymbol{\Sigma_0}$ は適当な乱数を発生させてその標本平均、標本分散を採用した．同様に、パラメータ $\boldsymbol{G}, \eta$ については、以下のように設定した．期待収益率 $\boldsymbol{\mu}$ の不確実性集合 $\mathcal{M}$ の楕円体の形状を決めるパラメータ $\boldsymbol{G}$ については、推定値の周りに推定値の 1 シグマ分の領域を持つように

$$
\boldsymbol{G} = \mathbf{diag}(\frac{1}{\sigma^2_{\hat{\mu}_i}}), \quad i = 1, ..., n \tag{47}
$$

と設定した．ただし、$\sigma_{\hat{\mu}_i}$ は期待収益率の推定値 $\hat{\mu}_i$ の標準偏差を表す．また、分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の不確実性集合 $\mathcal{S}$ を決めるパラメータ η については簡単に $\eta = 0.5$ とおいた．SOCP と SDP を解くソルバーとしては SeDuMi ver.105[12] を使用し、PC(Pentium 4 - 1.4GHz, 512MB) 上で実行した．ロバスト・トラッキングエラー最小化モデルを SOCP と SDP それぞれで定式化した場合について、計算機上の変数と制約式の数は表 1 のようになった．以上のもとで、最適解を得るまでの反復回数と CPU 時間をそれぞれ測定し表 2 に記した．

SOCP モデルと SDP モデルに対しそれぞれ変数変換を行い標準形 (目的関数と制約式が線形で各変数がそれぞれ 2 次錐あるいは半正定値錐に入る形式) にした場合、SOCP モデルは変数と線形制約の数がそれぞれ約 $3n$,$2n$ になるのに対して、SDP モデルはそれぞれ約 $2n^2$,n になった．そのため、計算時間も資産数が 100 以上で 10 倍程度の差がついている．ポートフォリオ選択問題を考えるときに対象とする資産数はすくなくとも 100 銘柄以上、可能ならば数 1000 銘柄以上で解く事が好ましいため、この計算時間の違いは無視することのできない差であるといえる．

表 1: 変数と線形制約の数

	資産数	5	10	50	100	500	1000
変数	SOCP	28	43	163	313	1513	3013
	SDP	109	307	5487	20962	504762	2009512
線形制約	SOCP	22	35	135	260	1260	2510
	SDP	8	13	53	103	503	1003

表 2: 反復回数と CPU 時間

	資産数	5	10	50	100	500	1000
反復回数	SOCP	11	12	12	14	20	22
	SDP	14	15	17	21	27	29
CPU 時間	SOCP	0.31	0.34	0.55	1.41	111.59	899.42
	SDP	0.34	0.39	2.00	8.75	1319.52	10623.72

5 おわりに

本稿ではポートフォリオ最適化の一種である平均分散モデルとトラッキングエラー最小化モデルについてロバスト最適化をおこなった．そして、それらのロバスト最適化モデルが 2 次錐計画問題に帰着できることを証明した．特に、ロバスト・トラッキングエラー最小化モデルは、いままでは半正定値計画問題のクラスにまでしか定式化できていなかったのに対し、より単純な構造を持つ 2 次錐計画問題に定式化できたことは、最適ポートフォリオの計算において大きなメリットである．さらに、数値実験を行うことにより SOCP モデルが従来の SDP モデルよりも大幅に計算時間が改善されることを示した．

参考文献

[1] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. *Robust convex optimization.* Math. Oper. Res., 23(4):796-805, 1998.

[2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory.* SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

[3] O. L. V. Costa, A. C. Paiva. *Rubust portfolio selection using linear-matrix inequalities.* Jornal of Economic Dynamics and Control, 2000.

[4] L. El Ghaoui and H. Lebret. *Robust solutions to least-squares problems with uncertain data.* SIAM J. Matrix Anal. Appl., 18(4):1035-1064, 1997.

[5] D. Goldfarb and G. Iyengar. *Robust portfolio selection problems.* Technical Report TR-2001-05, Computational Optimization Reserch Center (CORC), IOER Department, Columbia University, 2001.

[6] 枇ヶ木規雄. 金融工学と最適化. 朝倉書店, 2001.

[7] 岩崎 徹也. *LMI* と制御. 昭晃堂, 1997.

[8] M. S. Lobo. *Robust and convex optimization with applications in finance.* , 2000.

[9] M. S. Lobo, L.Vandenberghe, S. Boyd, and H. Lebret. *Applications of second-order cone programmings.* Linear Algebra Appl., 284(1-3):193-228, 1998.

[10] D. G. Luenberger. *Investment Science.* Oxford University Press, NewYork, 1998.

[11] H. Markowitz. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments.* John Wiley, NewYork, 1959.

[12] Jos F. Sturm. *Using SeDuMi 1.02,A Matlab Toolbox for Optimization over Symmmetric Cones.* Optimization Methods and SoftWare 11-12 625-653, 1999.